Suite et conjecture de Syracuse
Algorithme

1 Définition

La suite de Syracuse est définie de la façon suivante : on choisit un entier naturel non nul, s'il est pair on le divise par 2 sinon on lui applique la fonction $x \mapsto 3x+1$ et l'on réitère le processus. Ainsi si l'on choisit 7, on obtient la suite des entiers naturels suivant :

7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

Après avoir atteint le nombre 1, les valeurs 4, 2, 1 se répète indéfiniment, en un cycle de longueur 3 appelé cycle trivial.

> *A priori, il serait possible que la suite de Syracuse de certaines valeurs de départ n'atteigne jamais la valeur 1, soit qu'elle aboutisse à un cycle différent du cycle trivial, soit qu'elle diverge vers l'infini. Or, on n'a jamais trouvé d'exemple de suite obtenue suivant les règles données qui n'aboutisse pas à 1 et, par suite, au cycle trivial.*
>
> *Wikipédia*

La conjecture de Syracuse ou problème de $3x+1$

Soit la suite de Syracuse : $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ pair} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ impair} \end{cases}$

La suite de Syracuse finit toujours par atteindre 1.

2 Origine

Dès 1928, Lothar Collatz s'intéressait aux itérations dans les nombres entiers. Il inventa alors le problème $3x+1$, et le présentait souvent ensuite dans ses séminaires. En 1952, lors d'une visite à Hambourg, Collatz expliqua son problème à Helmut Hasse. Ce dernier le diffusa en Amérique à l'**université de Syracuse** : la suite de Collatz prit alors le nom de "*suite de Syracuse*". Entre temps, le mathématicien polonais Stanislas Ulam le répand dans le Laboratoire national de Los Alamos. Dans les années 1960, le problème est repris par le mathématicien Shizuo Kakutani qui le diffuse dans les universités Yale et Chicago.

Cette conjecture mobilisa tant les mathématiciens durant les années 1960, en pleine guerre froide, qu'une plaisanterie courut selon laquelle ce problème faisait partie d'un complot soviétique visant à ralentir la recherche américaine.

3 L'algorithme

L'algorithme suivant a pour but de visualiser les termes de la suite de Syracuse, à l'aide d'une fenêtre judicieusement choisie, à partir d'un terme initial, puis d'afficher le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir 1 et le maximum atteint.

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:SYRACUSE
:Prompt U
:0→I
:0→M
:EffDess
:While U>1
:U→V
:If ent(U/2)=U/2
:Then
:U/2→U
:Else
:3U+1→U
:End
:I+1→I
:If U>M
:U→M
:Ligne(I-1,V,I,U)
:End
:Pause
:Disp I,M
```

Variables : $U \in \mathbb{N}^*$, I, M, V : entiers

Entrées et initialisation

- Lire U
- $0 \rightarrow I$
- $U \rightarrow M$
- Effacer dessin

Traitement

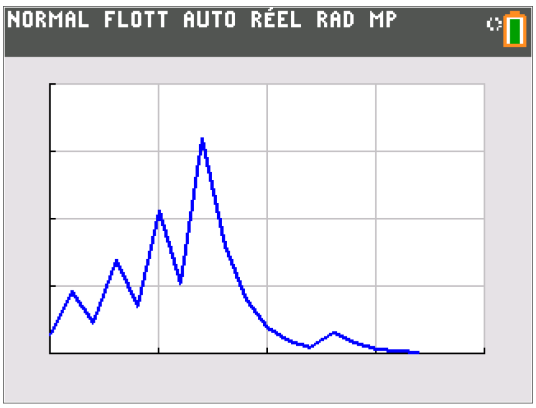
- **tant que** $U > 1$ **faire**
  - $U \rightarrow V$
  - **si** ent $\left(\dfrac{N}{2}\right) = \dfrac{N}{2}$ **alors**
    - $\dfrac{U}{2} \rightarrow U$
  - **sinon**
    - $3U + 1 \rightarrow U$
  - **fin**
  - $I + 1 \rightarrow I$
  - **si** $U > M$ **alors**
    - $U \rightarrow M$
  - **fin**
  - Afficher le segment($I-1$, V, I, U)
- **fin**

Sorties : Afficher I, M

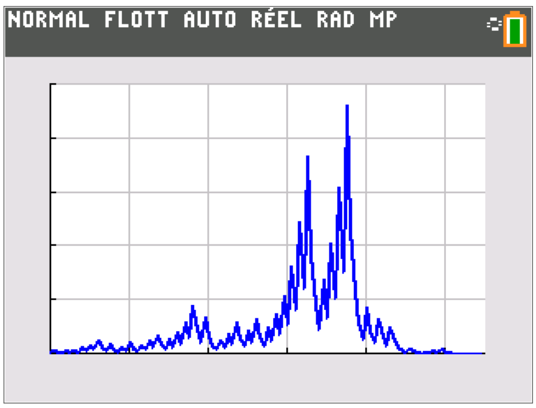
On teste l'algorithme pour différente valeur de u_0 :

u_0	7	15	23	24	41	57
I	16	17	15	10	109	32
M	52	160	160	24	9 232	196

On obtient les graphes suivante :



Suite Syracuse 15



Suite Syracuse 41

Remarque : L'observation graphique de la suite pour $u_0 = 15$ et pour $u_0 = 41$ montre que la suite peut s'élever assez haut avant de retomber. Les graphiques font penser à la chute chaotique d'un grêlon ou bien à la trajectoire d'une feuille emportée par le vent. De cette observation est né tout un vocabulaire imagé : on parlera du vol de la suite.

On définit alors :

- **le temps de vol** : c'est le plus petit indice n tel que $u_n = 1$, soit la valeur de I affichée par le programme.
  Il est de 17 pour la suite de Syracuse 15 et de 109 pour la suite de Syracuse 41.
- **l'altitude maximale** : c'est la valeur maximale de la suite. Il s'agit de la valeur M affichée par le programme.
  Elle est de 160 pour la suite de Syracuse 15 et de 9232 pour la suite de Syracuse 41.